

УДК 372.851

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КАК СРЕДСТВО РАЦИОНАЛИЗАЦИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ: МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ

БОНДАРЕНКО Татьяна Евгеньевна,

кандидат педагогических наук, доцент кафедры информатики и методики преподавания математики, Воронежский государственный педагогический университет

АННОТАЦИЯ. В статье рассматриваются методические аспекты обучения школьников рационализации вычислений посредством тождественных преобразований.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: тождественное преобразование выражения, рациональная вычислительная программа.

BONDARENKO T.E.,

Cand. Pedagog. Sci., Docent of the Department of Computer Science and Methods of Teaching Mathematics, Voronezh State Pedagogical University

IDENTITY TRANSFORMATIONS AS A MEANS OF COMPUTING RATIONALISATION: METHODOLOGICAL ASPECTS OF TEACHING

ABSTRACT. The article considers methodological aspects of pupils' teaching to rationalize calculations through identity transformations.

KEY WORDS: identity transformations, rational computer procedure.

Математические выражения и их тождественные преобразования составляют одну из содержательно-методических линий школьного курса алгебры. Основная цель изучения этого материала состоит в развитии формально-оперативных умений учащихся до уровня, позволяющего их использовать при решении задач математики и смежных предметов (физики, химии, основ информатики и др.). Обучение тождественным преобразованиям в школе обладает существенным недостатком: формализмом, когда практикуется «изо дня в день повторяющееся проведение преобразований ради преобразований, при котором даже не ставится вопрос о том, для чего это нужно» [1, с. 115]. Иными словами, речь идёт об отсутствии мотивации обучения. Средством такой мотивации может быть убеждение типа «если не научишься выполнять тождественные преобразования выражений, то вход во дворец математики для тебя закрыт». Действительно, без умения раскладывать на множители многочлены невозможно выполнять действия с алгебраическими дробями, решать уравнения и неравенства методом интервалов. Без умения выполнять тождественные преобразования алгебраических выражений невозможно работать с тригонометрическими, логарифмическими выражениями. Однако такого рода мотивы не очень убедительны для учащихся. Хорошим средством мотивации ценности тождественных преобразований является их использование как средства рационализации вычислений. Например, посчитать значение выражения $(a + b)^2$ при $a = 50$, $b = -0,3$ устно не представляется возможным, а выполнив тождест-

венное преобразование данного выражения, получим выражение $a^2 + 2ab + b^2$, значение которого легко считается устно: $50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 0,3 + 0,3^2 = 2470,09$. Таким образом, изучение тождественных преобразований может способствовать совершенствованию вычислительной подготовки учащихся, на низкий уровень которой указывают результаты многочисленных исследований и проверок.

Покажем на примере изучения преобразования вынесения общего множителя за скобки как методически организовать обучение, чтобы оно работало на рационализацию вычислений.

Прежде всего, следует сформировать у учащихся понимание того, что тождественное преобразование является средством перехода к иной вычислительной программе. Для этого целесообразно предложить следующие упражнения.

№ 1. Найдите значение выражения $ax + ay$, при $a = \frac{2}{5}$, $x = 1,4$; $y = 2,1$ двумя способами, исполь-

зуя для вычисления вторым способом выражение, полученное вынесением общего множителя за скобки.

№ 2. Составьте выражение для вычисления суммы площадей прямоугольников, имеющих измерения 1,4 м и 1,2 м, 0,8 м и 1,4 м, и найдите его значение. Правильность вычислений проверьте, выполняя их вторым способом, полученным преобразованием составленного выражения.

№ 3. Ученик заполнил таблицу соответственных значений функции $y = 1,4x$ (табл. 1).

Таблица 1

Таблица значений функций $y=1,4x$

| | | | |
|-------|------|-------|------|
| x_1 | -1,2 | y_1 | 1,68 |
| x_2 | 1,5 | y_2 | 2,1 |
| x_3 | 3,7 | y_3 | 5,18 |

Проверьте правильность заполнения таблицы следующим образом:

1. Сложите колонку вычисленных значений функции: $y_1 + y_2 + y_3 = 1,4x_1 + 1,4x_2 + 1,4x_3$.

2. Вычислите значение этой суммы другим способом, используя вынесение общего множителя за скобки: $1,4(x_1 + x_2 + x_3)$, то есть, сложив колонку значений x и умножив полученную сумму на 1,4.

3. Сравните результаты, полученные в пунктах 1 и 2.

При выявлении роли изученного тождественного преобразования в вычислениях учащимся могут быть предложены и упражнения, в которых рассматриваются вычислительные приемы, основанные на вынесении общего множителя за скобки.

Приведем примеры таких упражнений.

№ 4. Докажите, что сумма квадрата и куба любого натурального числа равна произведению его квадрата и следующего натурального числа. Вычислите: $2^2 + 2^3; 5^2 + 5^3; 9^2 + 9^3$.

№ 5. Сумма двух последовательных нечетных чисел равна удвоенному четному числу, заключенному между ними. Докажите. Вычислите: $189+191; 19999+20001$.

Смысл приведенных упражнений состоит в следующем: рассматриваются выражения определенного вида (например, сумма квадрата и куба натурального числа). Значение этого выражения можно вычислить другим способом, причем этот способ указан (найти произведение квадрата данного числа и следующего числа). Следует доказать, что второй способ может быть получен из первого посредством изученного тождественного преобразования.

Выполняя предложенные упражнения, школьники убеждаются, что возможность вычислить значение выражения другим способом они получают посредством тождественного преобразования данного выражения. Таким образом, у них формируется понимание того, что изученное тождественное преобразование является средством перехода от одного способа вычисления значения выражения к другому способу вычисления того же значения. Отметим, что попутно учащиеся вооружаются методом контроля за правильностью вычислений: для того чтобы проверить верно ли выполнены вычисления, достаточно вычислить значение выражения, тождественно равному данному.

Далее следует организовать формирование системы действий поиска и реализации рациональной вычислительной программы, которая первоначально осуществляется в процессе рассмотрения отдельных тождественных преобразований. В систему войдут следующие действия: оценка рациональности вычислительной программы, определяемой данным выражением, выполнение изученного преобразования, выбор программы для реализации вычислений, выполнение вычислений.

Первоначально формируются отдельные действия, входящие в процесс поиска, а затем их систе-

ма. Из перечисленных действий учащиеся умеют выполнять преобразование выражения и вычисления. Следовательно, необходимо научить их оценивать рациональность вычислительной программы (по школьной терминологии – способа вычислений) имеющегося выражения и выбирать выражение для выполнения вычислений.

Проиллюстрируем формирование этих действий на примере вынесения общего множителя за скобки. Учащимся предлагаются следующие упражнения.

№ 1. Укажите среди данных выражений те, которые определяют рациональный способ вычислений:

1) $2,4 \cdot \frac{1}{11} + 4,2 \cdot \frac{1}{11}$ или $(2,4 + 4,2) \cdot \frac{1}{11}$;

2) $2,8 \cdot 10 + 2,8 \cdot \frac{2}{7}$ или $2,8 \cdot (10 + \frac{2}{7})$;

3) $4,8 \cdot 5,6 + 4,8 \cdot 7,2$ или $4,8 \cdot (5,6 + 7,2)$.

№ 2. Какое из выражений $ax + ay$ или $a(x + y)$ задает рациональный способ вычислений:

1) при $a = 1,2, x = 3,4, y = -2,4$;

2) при $a = 21, x = \frac{1}{7}, y = \frac{1}{3}$;

3) при $a = 3,71, x = 2,3, y = -1,03$?

Предлагая учащимся эти упражнения, мы обращаемся к имеющемуся у них опыту вычислений. Обсуждая ответы школьников, следует подвести их к выводу о том, что рациональный способ вычислений может характеризоваться наличием действий, выполнимых устно. Поэтому будем считать способ вычислений рациональным, если все или первоначальные действия устно выполнимы.

В связи с тем, что учащиеся вычисляли значение выражения двумя способами, используя для вычисления вторым способом выражение, тождественно равное данному, то для них будет естественным вопрос о выборе выражения для выполнения вычислений. Причем, если одно из выражений задает рациональный способ вычислений, ответ ясен. Как поступить в том случае, когда ни один из возможных способов не является рациональным? Например, в случае выражений $3,15 \cdot 1,2 - 1,9 \cdot 1,2$ или $1,2 \cdot (3,15 - 1,9)$. По всей видимости, учащиеся догадаются выбрать выражение $1,2 \cdot (3,15 - 1,9)$ и объяснят свой выбор тем, что оно содержит меньше действий.

После того, как отдельные действия, входящие в процесс поиска рациональной вычислительной программы, сформированы, следует организовать их в систему.

Формирование системы действий поиска и реализации рациональной вычислительной программы может осуществляться посредством следующих заданий.

№ 3. Вычислите значение выражения $ax + ay$:

- 1) при $a = \frac{1}{6}, x = 1,7, y = 4,3;$
- 2) при $a = 1,6, x = 3,4, y = 1,1;$
- 3) при $a = \frac{1}{8}, x = 16, y = \frac{2}{3}.$

Ученику, окончившему первым выполнение задания, предлагается сообщить правильный ответ и объяснить, каким способом он вычислял. В результате выясняется, что быстро и правильно удалось вычислить тем учащимся, которые использовали рациональный способ счета.

Анализируя ответы школьников, следует показать, что считавшие рационально в первом задании действовали следующим образом: оценили рациональность способа вычислений, определяемого данным выражением. Так как он оказался нерациональным, выполнили преобразование. Оценили способ вычислений, определяемый полученным выра-

жением. Так как он оказался рациональным, приступили к вычислениям.

Учащиеся, считавшие рационально во втором случае, действовали так же, но в результате преобразования не получили выражение, определяющее рациональный способ вычислений, поэтому из двух имеющихся выражений выбрали для вычислений то, которое содержит меньше действий.

Учащиеся, считавшие рационально в третьем случае, оценили рациональность способа вычислений, определяемого данным выражением, и, так как он оказался рациональным, перешли к вычислениям.

Обобщая приведенные рассуждения, получаем систему действий поиска и реализации рациональной вычислительной программы, которая может быть представлена в форме блок-схемы (рис. 1).

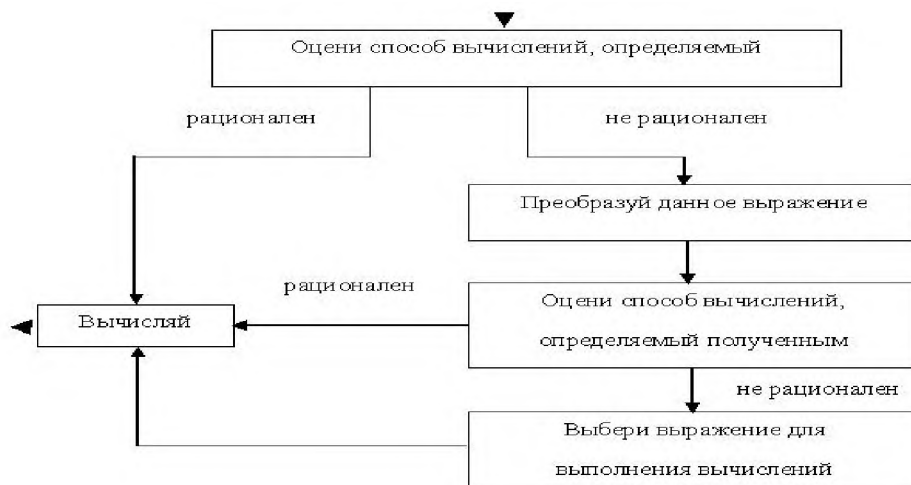


Рис. Система действий поиска и реализации рациональной вычислительной программы

Прослеживая по полученной схеме процесс поиска рационального способа вычислений для предложенных заданий, учащиеся получают (рис. 2).

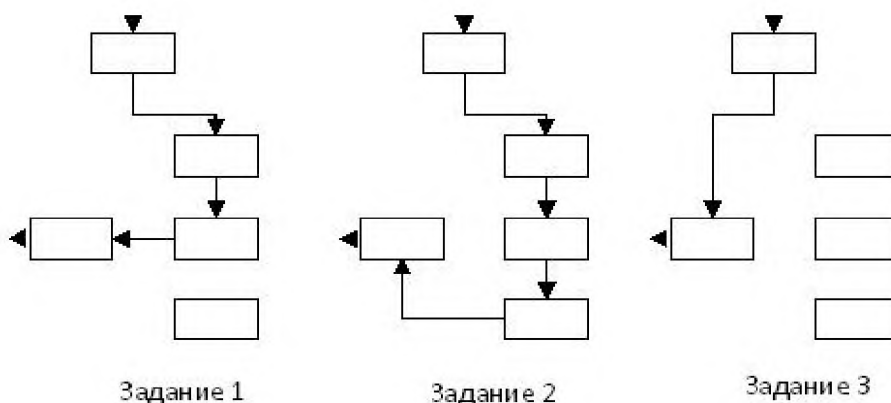


Рис. 2. Процесс поиска рациональной вычислительной программы

Приведем упражнения для формирования системы действий поиска и реализации рациональной вычислительной программы.

№ 4. Вычислите значение выражения рациональным способом:

1) $2,8 \cdot 7,6 + 7,2 \cdot 7,6, 54 \cdot \frac{1}{6} - 54 \cdot \frac{1}{9}, 5,1 \cdot 2,2 + 5,1 \cdot 2,6;$

2) $-\frac{6}{17} \cdot \frac{7}{13} - \frac{6}{17} \cdot \frac{6}{13}, 1,2 \cdot \frac{2}{3} + 1,2 \cdot \frac{3}{4}, 6,4 \cdot 1,6 - 2,1 \cdot 1,6;$

3) $\frac{1}{6} \cdot 1,4 + \frac{1}{6} \cdot 2,2 \cdot 1,8 \cdot \frac{1}{3} + 1,8 \cdot 0,1, \frac{7}{11} \cdot \frac{7}{12} - \frac{7}{11} \cdot \frac{5}{18}.$

№ 5. Вычислите значение выражения рациональным способом:

1) $ax + ay$, при $a = -\frac{1}{9}, x = 1,4, y = 2,2;$ при $a = -6,3, x = 2,8, y = -3,3;$

при $a = 24, x = \frac{3}{8}, y = \frac{5}{6};$

2) $2,1x + 2,1y$, при $x = 2, y = \frac{1}{7};$ при $x = 0,48, y = 0,52;$

3) $3,15a + cx$, при $a = 2,9, c = 7,1; x = 3,15;$

4) $3,4x + 6,1y$, при $x = 6,1, y = 7,2.$

После того, как система действий поиска усвоена, учащимся могут быть предложены упражнения, в которых усложняется техническая сторона (выполнение преобразований и вычислений), а система действий поиска остается неизменной. Приведем комплекс таких упражнений.

№ 6.

1) $2,56 \cdot 0,4 + 1,4 \cdot 0,4 - 1,46 \cdot 0,4;$

2) $\frac{5}{19} \cdot (3,8 - 5\frac{1}{3} + 4\frac{2}{3} \cdot 3\frac{4}{5});$

3) $\frac{3}{8} \cdot 7,2 + \frac{2}{9} \cdot 7,2 - \frac{1}{12} \cdot 7,2 - \frac{5}{18} \cdot 7,2;$

4) $4,59 \cdot \frac{1}{4} + 1,27 \cdot \frac{1}{4} + 2,3 \cdot \frac{1}{4};$

5) $\frac{4,5 \cdot 1,1 + 4\frac{1}{2} \cdot 1,2}{12,7 \cdot 1,5 - 8,1 \cdot 1,5};$

6) $\frac{2,4 \cdot 7,3 + 2,4 \cdot 2,7}{2,4 \cdot \frac{1}{6} - 2,4 \cdot \frac{1}{8}};$

7) $1,1 \cdot 1,2 - \frac{5}{6} \cdot 1,2^2;$

8) $1,1 \cdot \frac{5}{6} - \frac{5}{6} \cdot 1,2^2;$

9) $0,16 \cdot 6,41 \cdot \frac{1}{4} - 0,16 \cdot (\frac{1}{4})^2 - 0,16^2 \cdot \frac{1}{4};$

10) $\frac{1}{6} \cdot (2,31 + 2,8) + \frac{1}{6} \cdot (4,29 - 2,8);$

11) $2,6 \cdot (9,2 - 1,07) + 1,6 \cdot (1,07 - 9,2);$

12) $1,6 \cdot (5 - \frac{1}{3}) - 1,4 \cdot (\frac{1}{3} - 5);$

13) $(1,2 - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1,2).$

№ 7. Найдите значение выражения рациональным способом:

1) $xy + z$, при $x = 24, y = 98, z = 48;$

при $x = 24, y = 100, z = 48;$

2) $x^2 - 1,3x - 1,7$, при $x = -1,7;$

3) $a^2 - bc$, при $a = 1,25, b = -1\frac{1}{4}; c = 0,75;$

при $a = 1,4, b = 2,8, c = 5,7;$

4) $1,1 : x - 0,1 \cdot 15$, при $x = \frac{2}{3}.$

№ 8. Вычислите рациональным способом значение функции, заданной формулой:

1) $y = x^2 - 108$, при $x = 10,8;$

2) $y = 19x + 2,7$, при $x = 27$ и при $x = \frac{1}{19}.$

№ 9. Найдите значение выражения рациональным способом:

1) $26x + 13y$, при $x = 3,7, y = 2,6$, при $x = \frac{1}{13}, y = 0,1;$

2) $19x^2 - 7\frac{5}{7}x^3 + x^4$, при $x = \frac{5}{7};$

3) $a^2 - 86a + 13$, при $a = 87;$

4) $x^2(x + 3y) + y^2(x + 3y)$, при $x = 0,8, y = 0,6;$

5) $(x - y)(y + z) + (y - x)y$, при $x = 56,8, y = 43,1, z = \frac{1}{137};$

6) $(b - 3)^2 + 2b(3 - b)$, при $b = 1,1.$

№ 10. Составьте выражение для вычисления площади классной доски, изображенной на рисунке 3, и вычислите его значение рационально при $x = 1,4$ м, $a = 0,8$ м.

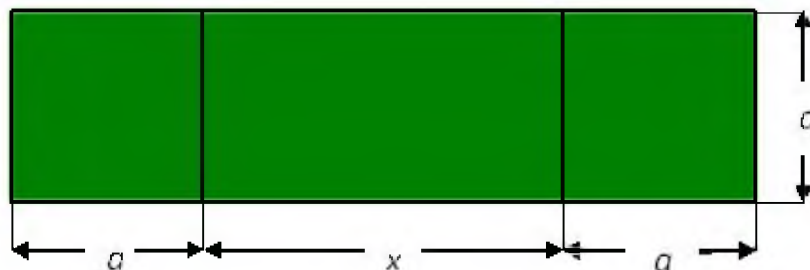


Рис. 3. Изображение классной доски

Отметим, что система действий поиска рациональной вычислительной программы рассмотрена нами для отдельно изученного преобразования. Она

усложняется при включении действия выбора преобразования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Хинчин А.Я. Педагогические статьи / А.Я. Хинчин. – М. : Изд-во Академии пед. наук РСФСР, 1963. – 204 с.